

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Кафедра математики и экономической информатики

Методическая разработка

по дисциплине «Линейная алгебра»

**для организации практических занятий и
самостоятельной работы студентов заочной
формы обучения**

по направлению 080100.62 «Экономика» и

по направлению 080100.62 «Экономика»

с сокращенным сроком обучения

Казань 2012

Составители:

зав.кафедрой, профессор **Марданов Р.Ш.**,

к.ф.-м.н., доцент **Хасанова А.Ю.**,

к.ф.-м.н., доцент **Романова Е.М.**,

к.ф.-м.н., доцент **Султанов Р.А.**

Рецензент:

к.ф.-м.н., ст. преподаватель **Опокина Н.А.**

Обсуждена на заседании кафедры математики и экономической информатики 2 июня 2011 , протокол № 10.

Утверждена Учебно-методической комиссией 16 октября 2012 г., протокол № 8.

Введение

Методическая разработка способствует системному изучению дисциплины «Линейная алгебра» студентами заочной формы обучения по направлению 080100.62 «Экономика» и по направлению 080100.62 «Экономика» с сокращенным сроком обучения и включает: вопросы для обсуждения, контрольные вопросы, практические задания и задания для самостоятельной работы студентов, варианты типовых заданий по темам курса для подготовки к контрольной работе, список литературы.

Практические занятия по дисциплине «Линейная алгебра» проводятся с целью изучения и усвоения студентами теоретических вопросов дисциплины. Уровень усвоения студентами теоретического материала проверяется посредством опроса по основным вопросам темы. Контрольные вопросы и задания предназначены для проверки качества усвоения лекционного материала. Ответы на контрольные вопросы и задания готовятся студентами самостоятельно и проверяются преподавателем на практических занятиях. Решение задач в рамках практических занятий позволяет студентам применить теоретические знания, полученные на лекционных и практических занятиях.

В соответствии с планом-графиком организации учебного процесса по курсу «Линейная алгебра» студенты заочной формы должны выполнить контрольную работу и экзамен в виде компьютерного тестирования.

В соответствии с программой курса и календарно-тематическим планом в контрольную работу входят разделы по темам курса «Линейная алгебра» и их приложения к решению некоторых экономических задач. Для подготовки к контрольной работе в данную методическую разработку включены варианты типовых заданий по основным темам курса.

По разделам курса студенты должны сдавать экзамен в виде компьютерного тестирования. Контрольную работу студенты выполняют также в виде компьютерного тестирования. Электронный вариант базы экзаменационных тестов размещается на сайте института.

Для формирования текущего рейтинга на занятиях будут проводиться самостоятельные работы, письменные и устные опросы. Для подготовки к ним в методической разработке приводятся примерные варианты заданий для текущего поэтапного контроля знаний студентов.

Основная часть

Тема 1. Определители и его свойства. Метод Крамера решения систем линейных уравнений (0,5 занятия)

Вопросы для обсуждения

1. Определители 2 - го, 3 - го, n - го порядков.
2. Свойства определителей.
3. Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
4. Методы вычисления определителей n - го порядка: разложение определителя, метод понижения порядка.
5. Система n линейных уравнений с n неизвестными, ее решение методом Крамера.

Практические задания

1. Вычислить определители:
[4]: №№ 4.15, 4.20, 4.22, 4.24, 4.25, 4.29(а), 4.41, 4.42;
2. Решить системы уравнений методом Крамера: [4]: №№ 6.3, 6.5, 6.7.

Контрольные вопросы

1. Определитель – это число или таблица чисел?
2. Сколько элементов содержит определитель n - го порядка?
3. Что называется минором, алгебраическим дополнением элемента определителя?
4. Какими свойствами обладает определитель?
5. Как вычисляются определители 2 - го и 3 - го порядков?
6. Какие свойства определителей применяются при вычислении определителя n - го порядка методом разложения, методом понижения порядка?
7. Какие системы уравнений решаются методом Крамера?
8. Что гласит теорема Крамера и какие формулы для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными здесь используются ?

Задания для самостоятельной работы

1. Определители, методы вычисления определителей: [1]: с. 5 – 16.
2. Вычислить определители: [4]: №№ 4.17, 4.19, 4.21, 4.23, 4.29(б), 4.38, 4.39.
3. Методом Крамера решить системы уравнений: [4]: №№ 6.2, 6.4, 6.6.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, раздел 5, глава 22, §22.1-§22.2, с. 5- 15.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, глава 21, с. 319-329.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004, с. 89-93.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 2. Матрицы и действия над ними. Матричный способ решения систем линейных уравнений (1 занятие)

Вопросы для обсуждения

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Действия над матрицами и их свойства.
3. Обратная матрица, теорема о ее существовании.
4. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
5. Матричная форма записи систем n линейных уравнений с n неизвестными и ее решение с помощью обратной матрицы.

Практические задания

1. Выполнить действия над матрицами: [1]: с. 58 – 59, №№ 1, 3, 5(б); [4]: №№ 5.1, 5.8, 5.10, 5.15(в).
2. Найти обратную матрицу: [2]: с. 341, №№ 22.13 (1-13).
3. С помощью обратной матрицы решить системы уравнений: [1]: с. 59, № 6; [4]: № 6.8.

Контрольные вопросы

1. Какие виды матриц вы знаете?
2. У каких матриц существует определитель?
3. Как выполняются операции сложения и вычитания матриц, умножения матрицы на число?
4. При каком условии существует произведение матриц?
5. Как выполняется операция умножения матрицы на матрицу?
6. Какими свойствами обладают действия над матрицами?
7. Каково определение обратной матрицы?
8. Как записывается система n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме?
9. Как решаются матричные уравнения?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить действия над матрицами: [1]: с. 58 – 59, №№ 2, 4, [4]: №№ 5.4, 5.9, 5.12.
2. Найти обратные матрицы: [1]: 5(а); [2]: с. 342, №№ 22.17.
3. Решить матричным способом систему уравнений: [4]: № 6.9.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 58 – 59.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, глава 22, стр.329-344.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004, с. 341.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 3. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен (1 занятие)

Вопросы для обсуждения

1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
2. Матрицы коэффициентов прямых и полных затрат, их экономический смысл.
3. Уравнение зависимости между валовой и конечной продукцией.
4. Модель равновесных цен.

Практические задания

1. Решить задачи межотраслевого баланса: [2]: с. 346, №№ 22.20 (1- 6).

Контрольные вопросы

1. Что отражает межотраслевой баланс?
2. Что означают элементы x_{ij} в таблице межотраслевого баланса?
3. Как выглядит система балансовых уравнений, характеризующих распределение продукции отраслей?
4. Какой экономический смысл имеют коэффициенты прямых затрат?
5. Как называется матрица коэффициентов прямых затрат?

6. Как записывается матричное уравнение зависимости объема валовой продукции от объема конечной продукции отраслей. Какая матрица называется матрицей Леонтьева?

7. Каков экономический смысл столбцов матрицы коэффициентов полных затрат?

8. Чем замечательна матрица коэффициентов полных затрат?

9. Как определить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли по заданному ассортименту конечной продукции?

Задания для самостоятельной работы

1. Описать экономико-математическую модель Леонтьева: [1]: с. 29 – 51.

2. Решить задачи межотраслевого баланса: [1]: с. 59, № 7.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 29 – 51.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 344-351.

Тема 4. n -мерные векторные пространства. Линейная зависимость системы векторов (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. n -мерные векторы и действия над ними.

2. n -мерное линейное векторное пространство $R^{(n)}$.

3. Линейные операторы.

4. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

5. Свойства линейной зависимости и линейной независимости системы векторов.

6. Понятие базиса n - мерного векторного пространства. Разложение вектора пространства $R^{(n)}$ по векторам базиса.

Контрольные вопросы

1. Как определяются n - мерный вектор и алгебраические действия над векторами?

2. Что называется n - мерным векторным пространством?

3. Какие векторы называются линейно зависимыми и линейно независимыми?

4. Какими свойствами обладают линейно зависимые системы векторов?

5. Когда линейно зависимы и линейно независимы системы из m векторов n - мерного векторного пространства в случаях: а) $m > n$, б) $m = n$, в) $m < n$?

6. Что называется рангом системы векторов?

7. Могут ли у одной и той же системы векторов существовать базисы, содержащие различное число векторов?

8. Что называется базисом n - мерного векторного пространства? Сколько различных базисов существует в n - мерном векторном пространстве?

9. Что утверждает теорема о разложении вектора по базису? Докажите однозначность этого разложения.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на линейную зависимость и независимость: [1]: с. 60 – 75.

2. Выполнить следующие задания: [1]: с. 76, №№ 1(а), 2(а), 3(а); [4]: №№ 7.3, 7.5, 7.26, 7.27.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 60 – 75.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, глава 23, с.356-363.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 5. Виды произведений в R^3 : скалярное, векторное и смешанное (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Скалярное произведение, его свойства и применение.
2. Векторное произведение. Геометрический смысл векторного произведения.
3. Смешанное произведение. Условие компланарности векторов.
4. Евклидово пространство.

Контрольные вопросы

1. Как определяется скалярное произведение?
2. Какими свойствами обладает скалярное произведение?
3. Как вычисляется угол между векторами?
4. Как записываются условия параллельности векторов в координатной векторной форме?
5. Какое условие ортогональности векторов, вы знаете?
6. Что называется векторным произведением?
7. Какие свойства векторного произведения вы знаете?
8. Какова формула вычисления векторного произведения в координатах?
9. Где и как применяется векторное произведение?
10. Что такое смешанное произведение?

11. Как определяется евклидово пространство?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить следующие задания: [3]: с. 57, №№ 418, 419, 421;
2. Выполнить действия над векторами: [2]: с. 357, №№ 23.2
3. Найти произведения: [3]: с. 59, №№ 433, 434, 435
4. Доказать тождества: [3]: с. 61, №№ 444, 445

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 60-63.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 357.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004, с. 56 – 61.

Тема 6. Поверхности в пространстве (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Уравнения прямой и плоскости в трехмерном пространстве, записанные через скалярное, векторное и смешанное произведения.
2. Полупространства.
3. Уравнение поверхности 2-го порядка.
4. Сфера, эллипсоид, цилиндрические поверхности.

Контрольные вопросы

1. На сколько октантов делится декартова прямоугольная система координат в трехмерном пространстве?

2. Как называется третья координата точки в трехмерном пространстве?
3. Как называются координатные плоскости трехмерной прямоугольной системы координат.
4. Как записывается общее уравнение поверхностей в трехмерном пространстве?
5. Какая линия называется линией уровня?
6. Как найти сечения поверхности координатными плоскостями?
7. Как определяется сфера и записываются ее общее и каноническое уравнения?
8. Каковы определения эллипсоида, его вершины и фокусов? Какие свойства эллипсоидов, вы знаете?
9. Как определяется цилиндрическая поверхность и записывается ее уравнение?
10. Какой вид имеет общее уравнение плоскости в пространстве? Как записываются уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям, параллельных осям координат?
11. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
12. Какой вид имеют общее, каноническое, параметрические уравнения прямой в пространстве. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
13. Как найти координаты точек пересечения прямой и плоскости, двух прямых в пространстве?
14. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить следующие задания: [5]: с. 9 – 12, с. 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008, с. 17 – 28.
5. Экономико-математическое моделирование: учебник / Под ред. И.Н. Дрогобыцкого. -2-е изд. стереотипн.- М.: Изд-во «Экзамен», 2006, с. 9–12.

Тема 7. Собственные значения и собственные векторы (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

- 1.Собственные значение матрицы.
- 2.Собственные векторы линейных операторов и их свойства.
- 3.Теорема Фробениуса-Беррона для неразложимых матриц.

Контрольные вопросы

- 1.Какие числа называются собственными значениями матрицы?
- 2.У каких матриц существуют собственные значения?
- 3.Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы?
4. Какой вектор называется собственным вектором квадратной матрицы, линейного оператора?

5. Как найти собственный вектор матрицы, соответствующий ее собственному значению?

6. Какими свойствами обладают собственные вектора линейных операторов?

7. Что утверждает теорема Фробениуса-Беррона?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить следующие задания: [1]: с. 106 – 110, №№ 9.1 – 9.32

Рекомендуемая литература

1. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008, с. 106 – 110.

Тема 8. Квадратичные формы (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Понятие квадратичной формы.
2. Канонический базис квадратичной формы.
3. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы.
4. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.

Контрольные вопросы

1. Каково определение квадратичной формы?
2. Какая квадратичная форма называется симметричной?
3. Какие квадратичные формы называются знакоопределенными:
а) положительно определенными, б) отрицательно определенными?
4. Какие квадратичные формы знаконеопределенны?
5. Какие миноры матрицы квадратичной формы называются главными?
6. Как формулируется критерий Сильвестра?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить следующие задания: [4]: с. 230 – 234, 282 – 283; [2]: с. 114 – 117, №№ 9.58 – 9.78.

Рекомендуемая литература

1. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.135-136.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008, с. 114 –117.
3. Экономико-математическое моделирование: учебник / Под ред. И.Н. Дрогобыцкого. -2-е изд. стереотипн.- М.: Изд-во «Экзамен», 2006.
4. Красс М. С. Математика для экономических специальностей. М.: ИНФРА-М, 1998, с. 230 – 234, 282 – 283.

Тема 9. Ранг матрицы (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Ранг системы векторов и ранг матрицы.
2. Методы вычисления ранга матрицы.
3. Ортогональные системы векторов.

Контрольные вопросы

1. Что такое ранг матрицы?
2. Какие преобразования матрицы не изменяют ее ранга?
3. Какие существуют методы вычисления ранга матрицы?
4. Как формулируется теорема о базисном миноре?
5. Как вычисляется ранг системы векторов?
6. Какие векторы системы являются базисными векторами этой системы?

7. Как определить число линейно независимых векторов в системе векторов, если число векторов в этой системе меньше их размерности?
8. Какие системы векторов называются ортогональными?
9. Как формулируется теорема Кронеккера – Капели?

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить различными способами ранги матриц: [1]: с. 51 – 58.
2. Вычислить ранги матриц: [4]: №№ 5.58, 5.60, 5.62, 5.64.
3. Исследовать на совместность системы уравнений: [4]: №№ 6.17, 6.19.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 51 – 58.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.358-377.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 10. Произвольные системы линейных уравнений. Метод Жордана-Гаусса (0.5 занятия)

Вопросы для обсуждения

1. Произвольные системы m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Понятие общего, частного и базисного решений системы уравнений.
3. Алгоритм метода Жордана - Гаусса.
4. Переход от одного базисного решения к другому.

Практические задания

1. Найти общее, базисное и частное решения систем уравнений: [1]: с. 112, № 2(а); [4]: №№ 6.23, 6.29.

Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы уравнений?
2. Какие системы уравнений называются совместными и несовместными, определенными и неопределенными?
3. Какие переменные называются базисными, свободными?
4. Каковы понятия общего, базисного и частного решений системы уравнений?
5. Какая система уравнений называется приведенной к единичному базису?
6. В чем заключается суть метода Жордана – Гаусса?
7. Сколько итераций необходимо выполнить для приведения системы уравнений к единичному базису?
8. Что означает выражение «однократное замещение» применительно к решениям системы уравнений?
9. По какой формуле вычисляется максимально возможное число различных базисных решений системы уравнений?

Задания для самостоятельной работы

1. Описать алгоритм метода Жордана - Гаусса: [1]: с. 77 – 100;
2. Найти общее, базисное и частное решения систем уравнений: [1]: с. 112, №№ 1(а.б); [4]: №№ 6.24, 6.25, 6.30.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 77 – 100.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.377-386.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 11. Опорные решения систем линейных уравнений (0,5 занятия)

Вопросы для обсуждения

1. Понятия опорного и допустимого решений систем линейных уравнений.
2. Симплексные преобразования.
3. Теорема о симплексных преобразованиях.
4. Переход от одного опорного решения к другому.

Практические задания

1.Найти общее, два опорных и одно допустимое решения систем уравнений:

[1]: с. 112, № 3, 4; [2]: с.387, №№ 24.5(1- 6), 24.6(1- 6), 24.7(1- 6).

Контрольные вопросы

1. Какие решения систем линейных уравнений называются опорными, допустимыми?
2. Какие преобразования систем линейных уравнения называются симплексными?
3. Как следует преобразовать уравнение системы, у которого свободный член отрицателен?
4. Как звучит правило выбора разрешающей строки при симплексных преобразованиях?

5. При каком условии можно с уверенностью утверждать, что система уравнений не имеет опорных решений?

6. Как формулируется теорема о симплексных преобразованиях?

7. Как перейти от найденного опорного решения системы уравнений к новому?

Задания для самостоятельной работы

1. Найти общее, два опорных и одно допустимое решения систем уравнений:

[1]: с. 100 – 112; [2]: с.387, №№ 24.5(7-10), 24.6(7-10), 24.7(7-10).

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 100 – 112 .

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.387-388.

Тема 12. Общая задача линейного программирования (0.5 занятия)

Вопросы для обсуждения

1. Общая задача оптимизации.

2. Типы задач математического программирования: линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование.

3. Понятие экономико-математической модели (ЭММ) и этапы ее составления.

4. Системы линейных неравенств.

5.Примеры линейных ЭММ задач линейного программирования (ЗЛП): задачи распределения ресурсов и задачи «о диете».

6.Постановка и различные формы записи ЗЛП: стандартная и каноническая формы записи ЭММ ЗЛП.

7.Геометрическая интерпретация ЗЛП. Графический метод. Понятие о выпуклом многоугольнике допустимых решений.

Практические задания

1. Составить ЭММ ЗЛП и решить ЗЛП графическим методом:

[1]: с. 142 – 144, №№ 1, 3; [3]: №№ 1.16, 1.18.

2. Решить задачи графическим методом: [3]: №№ 1.7, 1.9,

Контрольные вопросы

1.В каких формах может быть задана ЗЛП?

2.Как ЭММ ЗЛП приводится к каноническому виду?

3.Какое решение ЗЛП называется опорным, оптимальным?

4.Какое решение ЗЛП называется невырожденным?

5.Какое множество называется выпуклым? Приведите геометрическую иллюстрацию выпуклых и невыпуклых областей.

6.Какова геометрическая иллюстрация ЗЛП?

7. Как формулируются теоремы, характеризующие свойства решений ЗЛП?

8. В каких случаях ЗЛП может не иметь оптимального решения?

Задания для самостоятельной работы

1. Составить ЭММ ЗЛП и записать ее в сокращенной, матричной и векторной формах; двумерные ЗЛП решить графическим методом:

[1]: с. 114 – 141, с. 143 – 144, №№ 2, 4; [3]: №№ 1.8, 1.10, 1.19, 1.20.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 114 – 144 .
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.389-408.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд.,испр. – М.: ИНФРА-М, 2008.

Тема 13. Симплексный метод решения задачи линейного программирования (1 занятие)

Вопросы для обсуждения

- 1.Понятие допустимого, опорного, оптимального решений ЗЛП.
- 2.Понятие выпуклого множества. Область допустимых решений ЗЛП.
- 3.Теорема о достижении максимума или минимума целевой функции в угловой точке выпуклого многогранника решений.
- 4.Теоремы об оптимальности плана ЗЛП.
- 5.Симплексный метод. Алгоритм симплексного метода.

Практические задания

1. Составить ЭММ ЗЛП и решить симплексным методом:
[1]: с. 220, №№ 1(б), 4(б);; [3]: № 1.30; [2]: с. 410 - 412, №№ 25.23(1-10)
2. В задачах № №1(б), №№ 29, 30; [3]: № 1.30 дать экономический анализ оптимальных решений.

Контрольные вопросы

1. Как получить первоначальный план ЗЛП?
2. Каковы критерии оптимальности и единственности опорного плана ЗЛП на отыскание минимального и максимального значений целевой функции?
3. Когда при решении ЗЛП можно применить симплексный метод?
4. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?
5. Как выбирается разрешающий столбец в симплексной таблице при решении ЗЛП а) на максимум; б) на минимум?
6. Когда ЗЛП имеет альтернативный оптимум?
7. Как при решении ЗЛП симплексным методом определить, что задача не имеет оптимального решения?
8. В каком месте симплексной таблицы с оптимальным планом ЗЛП находится максимальное или минимальное значение целевой функции?

Задания для самостоятельной работы

1. Составить ЭММ ЗЛП и решить симплексным методом:
[1]: с. 145 – 171; с. 220, №№ 1(а), 4(а); [2]: с. 410 - 415, №№ 25.23(10-20).
2. В задачах № №1(а), №№ 27, 28 дать экономический анализ оптимальных решений.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 145 – 171, 220.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 408-415.

Тема 14. Метод искусственного базиса (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Составление расширенной ЗЛП.
2. Теорема о взаимосвязи исходной и расширенной задач.
3. Алгоритм метода искусственного базиса.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи линейного программирования решаются методом искусственного базиса?
2. Как составляется расширенная задача?
3. В каком случае можно сократить количество вводимых искусственных переменных?
4. При каком условии оптимальный план расширенной задачи является оптимальным планом исходной задачи?
5. С какими коэффициентами искусственные переменные вводятся в целевую функцию в задачах а) «на максимум»; б) «на минимум»?
6. Чем отличаются симплексные таблицы для реализации симплексного метода и метода искусственного базиса?
7. Как определяется вектор, вводимый в базис, при использовании искусственного базиса?
8. Когда исходная задача не имеет решения и как это определить, решая расширенную задачу?

Задания для самостоятельной работы

1. Показать, где в таблице с оптимальным планом ЗЛП находятся оптимальное значение целевой функции и базисные компоненты оптимального плана.
2. Решить ЗЛП методом искусственного базиса:
[1]: с. 171 – 182; с. 221, № 5; [2]: с. 419 - 420, № 25.24(17-24).

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 171 – 182, 221.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.415-420.

Тема 15. Двойственность в линейном программировании (1 занятие)

Вопросы для обсуждения

1. Элементы теории двойственности.
2. Двойственные задачи и правила их построения.
3. Основные теоремы двойственности о взаимосвязи решений исходной и двойственной задач.
- 4.1. Экономическая интерпретация пары двойственных задач.
- 5.2. 1-ая и 2-ая теоремы двойственности, их экономический смысл на примере задачи об оптимальном распределении ресурсов.

Практические задания

1. Построить ЭММ двойственных задач, решить исходную и дать экономическую интерпретацию решения двойственной задачи:

[1]: с. 220 – 221, № 6; [2]: с. 389-393, №№ 25.(1-10);

Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность двойственности в линейном программировании?
2. Какие пары двойственных задач относятся к симметричным и несимметричным?
3. Как формулируются правила построения двойственной задачи?

4. Как формулируются основные теоремы двойственности?
5. Как по решению исходной (двойственной) задачи найти решение двойственной (исходной) задачи?
6. Какова экономическую интерпретацию двойственной задачи, если исходная задача состоит в оптимальном использовании ресурсов.
7. Как формулируются основные теоремы двойственности, их экономический смысл и значение?
8. Как определить рентабельность каждого вида продукции, используя двойственные оценки?
9. Как проводится экономический анализ показателей симплексной таблицы с оптимальным планом?

Задания для самостоятельной работы

1. Решить пары двойственных задач:

[1]: с. 182 – 211; [2]: с. 393-396, №№ 25.(11-18).

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 182 – 211.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 393-396.

Тема 16. Целочисленное программирование (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Понятие о дискретном программировании. Примеры целочисленных моделей.
2. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования.

3. Постановка задачи оптимального раскроя материалов, ее решение методом Гомори.

Контрольные вопросы

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Как формулируется задача целочисленного программирования?
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана ЗЛП являются дробными?
5. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?
6. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?

Задания для самостоятельной работы

1. Решить задач целочисленного программирования:

[1]: с. 262 – 270, с. 281 – 282, №№ 1, 2; [2]: с. 451,452, №№ 28.1(7-14).

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 262 – 270, с. 281 – 282.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 451,452.

Тема 17. Транспортные задачи линейного программирования (1 занятие)

Вопросы для обсуждения

1. Постановка транспортной задачи.

2. ЭММ транспортной задачи. Закрытая и открытая модели.
3. Теоремы о существовании решения.
4. Основные способы построения начального опорного плана.
5. Теоремы об оптимальности плана.
6. Метод потенциалов.
7. Правило построения цикла по переброске грузов.
8. Блокирование перевозок.
9. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.

Практические задания

1. Решить транспортные задачи:

[1]: с. 260, № 2; [2]: с. 437, 438, №№ 27.7, 27.9; [2]: с. 442, 443, №№ 27.13(1-5)

Контрольные вопросы

1. Какова постановка транспортной задачи и ее ЭММ?
2. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая – открытой?
3. Как открытую модель транспортной задачи привести к закрытой?
4. Каковы необходимые и достаточные условия существования решения транспортной задачи?
5. Сколько положительных компонент может содержать опорный план транспортной задачи?
6. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана транспортной задачи?
7. Какой план транспортной задачи является вырожденным?
8. Какой используется прием для преобразования вырожденного опорного плана транспортной задачи в невырожденный?

9. Как формулируется теорема об оптимальности плана транспортной задачи?
10. Как строится система потенциалов?
11. Как определяются оценки свободных клеток?
12. Как звучит критерий оптимальности плана транспортной задачи?
13. Каково определение цикла по переброске «грузов» в транспортной задаче. Как он строится?
14. Как осуществляется переброска объемов груза по вершинам цикла?
15. В чем заключается суть блокирования перевозок?
16. Как осуществляется блокирование перевозок?

Задания для самостоятельной работы

1. Решить транспортные задачи:

[1]: с. 232 – 258, с. 259 – 260; [2]: с. 439- 442, №№ 27.10, 27.13 (6-10).

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 232 – 258, с. 259 – 260.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с. 439- 442.

Тема 18. Задача о загрузке оборудования (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Постановка задачи о загрузке оборудования.
2. Составление ЭММ задачи о загрузке оборудования и приведение ее ЭММ к ЭММ транспортной задачи.
3. Алгоритм решения λ – задачи.

Контрольные вопросы

1. Почему распределительные задачи называются λ – задачами?
2. Какой экономический смысл имеет параметр λ ?
3. Какова постановка задачи о загрузке оборудования?
4. Как записывается ЭММ задачи о загрузке оборудования?
5. Как λ – задача сводится к транспортной?
4. Какой станок принимается как базовый? Чему равен индекс базового станка?
5. Как вычисляются индексы остальных станков?
6. В каких единицах следует выразить все величины распределительной задачи для сведения ее к транспортной?

Задания для самостоятельной работы

1. Решить λ – задачу: [1]: с. 251 – 258: № 3.22.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007, с. 251 – 258.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, с.444-448.

Тема 19. Сетевое планирование управления (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Сетевое планирование управления (СПУ).
2. Понятие структурного планирования, календарного планирования и оперативного управления.
3. Элементы теории графов: плоские графы.

4. Эйлеровы графы, гамильтоновы графы, орграфы.
5. Сетевые графики, правила их построения, нумерация событий.
6. Временные параметры сетевого графика.
7. Критический путь.

Контрольные вопросы

1. Каково определение графа?
2. Каково определение сетевой модели (сетевого графика)?
3. Что называется событием сетевого графика? Как оно изображается?
4. Какие виды работ применяются в сетевом графике и как они изображаются?
5. С какой целью при построении сетевых графиков используются фиктивные работы? В каких случаях вводятся фиктивные работы?
6. Что называется путем в сетевом графике? Как определяется длина пути? Какой путь называется критическим?
7. Влияют ли фиктивные работы на длину критического пути?
8. Каковы основные правила построения сетевого графика?
9. В чем заключается метод ранжирования событий сетевого графика?
10. Каковы определения раннего срока свершения события и позднего срока наступления события?
11. Как вычисляются ранний срок и поздний срок свершения события?
12. Чем отличается свободный резерв времени работы от ее полного резерва?
13. По каким формулам вычисляются полный и свободный резервы времени работы?
14. Какой путь называется критическим путем сетевого графика?
15. Как формулируются теоремы: о принадлежности события критическому пути; о принадлежности работы критическому пути?
16. Каковы этапы (алгоритм) расчета критического пути в сетевом графике?

17. Какова цель расчета критического пути в сетевом графике?

Задания для самостоятельной работы

1. Дать определения полных и свободных резервов времени работ.
2. Рассчитать временные параметры сетевого графика и длину критического пути: [1]: с. 308 – 314, № 1(в); [2]: с.459, №№ 29.5.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – 576 с.

Тема 20. Динамическое программирование (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Основные понятия и определения динамического программирования.
2. Принцип оптимальности.
3. Уравнение Беллмана.
4. Математическая теория оптимального управления.
5. Задача о распределении капиталовложений (портфель ценных бумаг).

Контрольные вопросы

1. Что является предметом динамического программирования?
2. Что называется управлением (стратегией)?
3. Какой метод применяется при решении задач динамического программирования?
4. Какое управление называется оптимальным?

5. Как формулируется принцип оптимальности Беллмана?
6. Как выводится функциональное уравнение Беллмана?
7. Как осуществляется прямой и обратный ход вычислений оптимального дохода.
8. Как осуществляется решение задачи об оптимальном распределении капиталовложений?

Задания для самостоятельной работы

1. Опишите шаги (этапы) решения задач динамического программирования на примере задачи об оптимальном распределении капиталовложений?
2. Решить задачи динамического программирования:
[1]: с. 283 – 294, с. 298 № 2; [2]: с. 464, 465, №№ 30.2.

Рекомендуемая литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под науч. ред. проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – 576 с.

Тема 21. Матричные игры (самостоятельное изучение)

Вопросы для изучения

1. Основные понятия теории игр.
2. Матричные игры.
3. Кооперативные игры, игры с природой.
4. Оптимальные стратегии.
5. Основная теорема теории матричных игр (теорема Дж. Неймана).
6. Методы решения матричных игр.

7. Связь матричных игр с задачами линейного программирования.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под конфликтной ситуацией в теории игр?
2. Каково определение матричной игры?
3. Какая функция называется платежной функцией?
4. Что представляют собой элементы платежной матрицы?
5. Какая игра называется матричной игрой с нулевой суммой? Как связаны между собой элементы платежных матриц игроков игры с нулевой суммой?
6. Какие игры называются кооперативными, играми с природой?
7. Каково определение стратегии? Что такое оптимальная стратегия?
8. Что называется нижней ценой матричной игры, ее верхней ценой?
9. Чем характеризуются максиминные и минимаксные стратегии игроков?
10. Каковы определения седловой точки, седлового элемента, цены игры в чистых стратегиях?
11. Как формулируется основная теорема теории матричных игр (теорема Дж. Неймана)?
12. Какие существуют методы решения матричных игр?
13. Как матричные игры сводятся к задачам линейного программирования?

Задания для самостоятельной работы

1. В следующих задачах найти нижнюю и верхнюю цены матричных игр и определить максиминные и минимаксные стратегии игроков. Провести анализ игр: [1]: №№ 2.4.1, 2.4.2.
2. Представить модель конфликта (уплата налога) в виде матричной игры, составить матрицу выигрышей игрока А, решить матричную игру в чистых стратегиях, найти цену игры: [1]: № 2.4.3.
3. Для данных платежных матриц определить наличие седловых точек: [2]: с. 124, № 1(1, 3, 6). Какие из приведенных игр решаются в чистых стратегиях?

4. Найти смешанные стратегии игроков в игре, заданной матрицей:

[1]: с. 97 – 117; [2]: с. 124, № 2 (2, 4, 5).

5. Решить матричную игру, приведя ее к задаче линейного программирования: [3]: с. 131 – 134; [4]: №№ 2.109, 2.111.

6. Решить следующие статистические игры: [1]: с. 251– 274; [2]: с. 125 – 126, №№ 4, 7.

Рекомендуемая литература

1. Экономико-математическое моделирование: учебник / под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд. «Экзамен», 2006, с. 97- 117, с. 251– 274 .

2. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-методическое пособие / кол. авторов; под ред. С. И. Макарова, С. А. Севастьяновой. – 2-е изд., перераб. – М.: КНОРУС, 2009, с. 124-126.

3. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математические методы и модели в экономике: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006, с. 131 – 134.

4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1993.

Варианты типовых заданий для подготовки к контрольной работе

**Задание 1 по теме 1. Определители и его свойства. Метод Крамера
решения систем линейных уравнений**

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -6 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}; 10) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задание 2 по теме 2. Матрицы и действия над ними. Матричный способ
решения систем линейных уравнений**

Решить системы линейных уравнений матричным способом (с помощью обратной матрицы):

$$1) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 3 по теме 3. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен

Задача. Дан межотраслевой баланс трехотраслевой модели хозяйства (в млн. руб.). Определить:

- технологическую матрицу;
- матрицу коэффициентов полных затрат;
- дать экономический анализ каждого столбца матрицы коэффициентов полных затрат;
- определить валовый выпуск X' на новый ассортимент конечной продукции Y' .

1.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	80	180	40	100	400	120
	2	80	300	120	100	600	150
	3	120	120	80	80	400	100

2.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	54	40	34	52	180	70
	2	72	60	17	51	200	80
	3	36	40	34	60	170	90

3.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	10	24	42	24	100	50
	2	50	48	56	86	240	100
	3	0	96	28	16	140	50
4.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	20	20	60	100	200	150
	2	20	40	60	80	200	100
	3	20	0	10	70	100	100

5.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	90	27	135	48	300	50
	2	90	54	45	81	270	80
	3	60	81	90	219	450	220

6.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	48	40	32	40	160	120
	2	16	40	64	80	200	100
	3	64	60	96	100	320	120

7.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	60	60	70	110	300	120
	2	30	80	35	55	200	100
	3	30	40	35	245	350	200

8.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	40	50	30	80	200	100
	2	60	50	60	80	250	100
	3	40	50	90	120	300	150

9.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	120	50	30	200	400	150
	2	80	25	30	115	250	120
	3	80	75	90	55	300	80

10.	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	36	24	20	40	120	60
	2	48	72	60	60	240	100
	3	72	48	20	60	200	100

Задание 4 по теме 11. Опорные решения систем линейных уравнений

Найти 2 опорных решения систем линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 22x_4 + 14x_5 = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -3x_1 - 11x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3, \\ -5x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -6x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 8, \\ 6x_1 + x_2 + 8x_3 - 15x_4 - 3x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -10x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ -8x_1 + 7x_2 + 16x_3 + 3x_4 - x_5 = 2; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 8, \\ -6x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 10, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 11x_5 = 1; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_4 + 8x_5 = 9; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ 11x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 8. \end{cases}$$

Задание 5 по теме 13. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Задача оптимального использования ресурсов:

Для производства трех видов продукции P_1, P_2, P_3 предприятие использует три вида ресурсов R_1, R_2, R_3 . Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции каждого вида даны в таблице:

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль(ден.ед.)	C_1	C_2	C_3	

Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли, дать экономический анализ оптимального решения.

Варианты заданий:

1.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	3	3	4	1200
R_2	2	2	0	400
R_3	2	3	2	600
Прибыль(ден .ед.)	80	70	60	

2.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	2	2	2	100
R_2	2	0	4	800
R_3	0	3	5	600
Прибыль (ден .ед.)	90	70	40	

3.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	5	0	3	150
R_2	0	1	0	100
R_3	1	3	1	360
Прибыль(ден .ед.)	40	90	60	

4.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	1	0	1	100
R_2	2	4	2	310
R_3	3	2	0	160
Прибыль (ден .ед.)	40	60	80	

5.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	4	2	4	3000
R_2	1	1	0	1000
R_3	1	0	1	1200
Прибыль (ден .ед.)	50	80	60	

6.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	5	2	1	3000
R_2	1	3	0	1800
R_3	4	0	1	2400
Прибыль (ден .ед.)	50	70	80	

7.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	6	2	2	2400
R_2	3	1	2	1440
R_3	2	1	0	1080
Прибыль (ден .ед.)	40	80	60	

8.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	0	2	4	2000
R_2	2	2	2	3000
R_3	1	2	0	6000
Прибыль (ден .ед.)	70	80	60	

9.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	2	0	2	1500
R_2	1	2	1	5000
R_3	1	3	0	6000
Прибыль(ден .ед.)	50	90	30	

10.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство 1 ед. продукции			Имеющиеся в наличии ресурсы
	P_1	P_2	P_3	
R_1	5	2	1	1200
R_2	0	2	1	720
R_3	1	1	2	540
Прибыль (ден .ед.)	50	60	80	

Задание 6 по теме 17. Транспортные задачи линейного программирования

Задача. Необходимо перевезти груз от трех поставщиков с объемами поставок a_1, a_2, a_3 к трем потребителям с объемами потребления b_1, b_2, b_3 . Тарифы перевозки 1 тонны груза от i -го поставщика j -му потребителю даны матрицей $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$. Определить план закрепления потребителей за поставщиками груза, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

$$1) \begin{array}{ll} a_1 = 300, & b_1 = 240, \\ a_2 = 320, & b_2 = 160, \\ a_3 = 270, & b_3 = 280, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{array}{ll} a_1 = 120, & b_1 = 100, \\ a_2 = 70, & b_2 = 140, \\ a_3 = 80, & b_3 = 80, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{array}{ll} a_1 = 95, & b_1 = 100, \\ a_2 = 105, & b_2 = 100, \\ a_3 = 120, & b_3 = 80, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 115, & b_1 = 100, & \\
 4) \ a_2 = 85, & b_2 = 130, & C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 80, & b_3 = 90, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 80, & b_1 = 100, & \\
 5) \ a_2 = 90, & b_2 = 120, & C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 100, & b_3 = 110, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 100, & b_1 = 80, & \\
 6) \ a_2 = 120, & b_2 = 180, & C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 80, & b_3 = 110, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 75, & b_1 = 90, & \\
 7) \ a_2 = 95, & b_2 = 80, & C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 100, & b_3 = 90, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 55, & b_1 = 80, & \\
 8) \ a_2 = 65, & b_2 = 70, & C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 100, & b_3 = 100, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 80, & b_1 = 90, & \\
 9) \ a_2 = 125, & b_2 = 110, & C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \\
 a_3 = 135, & b_3 = 160, &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 120, & b_1 = 125, & \\
 10) \ a_2 = 130, & b_2 = 125, & C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \\
 a_3 = 100, & b_3 = 150, &
 \end{array}$$